5.3- Système du second ordre

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K}{\dfrac{s^2}{\omega_o^2}+\dfrac{2\xi}{\omega o}s+1}$$

$$H(j\omega)=\frac{K}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_o^2}+j\dfrac{2\xi}{\omega o}\omega}=\frac{K}{1-u^2+j\,2\xi\,u}$$

$$\Rightarrow \left|H(j\omega)\right|=\frac{K}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2+4\xi^2u^2}}$$

$u=\dfrac{\omega}{\omega_o}$ Pulsation réduite si K<0 , on remplace K par -K

$$\left|H(j\omega)\right|_{dB} = 20\log K - 10\log\left[\left(1-u^2\right)^2 + 4\xi^2 u^2\right]$$

$$\left|H(j\omega)\right|_{dB} \xrightarrow{\omega\to 0} 20\log K \quad (1^{\text{ère}} \text{ asymptote})$$

$$\left|H(j\omega)\right|_{dB} \xrightarrow{\omega\to \infty} 20\log K - 10\log(u^4) = 20\log K - 40\log(u)$$

$$= -40\log\omega + 20\log K + 40\log\omega_o$$

$$(2^{\text{ème}} \text{ asymptote de pente - 40dB/décade ou - 2})$$

Dans le plan de Bode, il y'a intersection des asymptotes pour $\omega=\omega_o$:

$$\left|H(j\omega_o)\right| = \frac{K}{\sqrt{4\xi^2}} = \frac{K}{2\xi}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2 + 4\xi^2 u^2}}$$ est maxi si :

$$P(u) = \left(1-u^2\right)^2 + 4\xi^2 u^2$$ est mini

Soit :

$$\frac{dP(u)}{du} = -4.u\left(1-u^2\right) + 8\xi^2 u = 4u(2\xi^2 + u^2 - 1) = 0$$

$$u = 0 \quad (\omega = 0) \quad \text{ou} \quad u^2 = 1 - 2\xi^2$$

Ce qui n'est possible que si : $\xi \prec \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$

Dans ce cas : $u = \sqrt{1-2\xi^2} \Rightarrow \omega = \omega_o \sqrt{1-2\xi^2} = \omega_r$

Si $\zeta<0.707$, il existe une pulsation de résonance :

$$\omega_r = \omega_o \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$|H(j\omega_r)|_{dB} = 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{\left(1-1+2\xi^2\right)^2 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}}\right)$$

$$= 20\log K + 20\log\frac{1}{\sqrt{4\xi^2(1-\xi^2)}} = 20\log K + 20\log\frac{1}{2\xi\sqrt{(1-\xi^2)}}$$

$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{2\xi\sqrt{(1-\xi^2)}} \qquad |H(0)| = K$$

On défini le facteur de résonance (ou de surtension) M et de qualité Q :

$$M = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2\xi\sqrt{(1-\xi^2)}}, \quad Q = \frac{|H(j\omega_0)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2\xi}$$

Si $\zeta<0.707$, alors pour $\omega = \omega_r$:

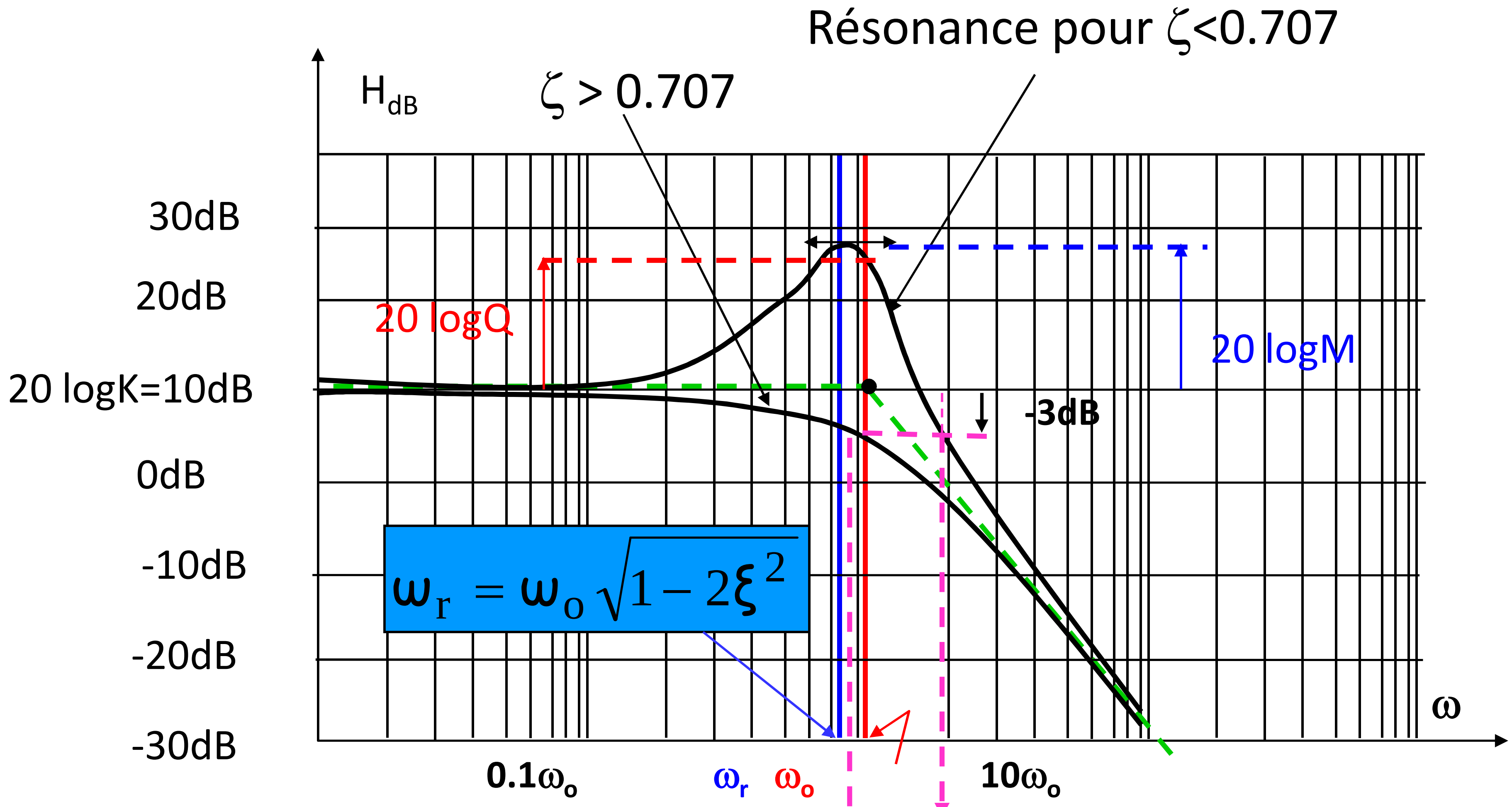
$$\boxed{\left| H(j\omega_r) \right|_{dB} = 20 \log K + 20 \log M}$$

Le facteur de résonance M varie de 1 à ∞ quant ζ varie de 0.707 à 0

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - u^2 + j2\xi u}$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \begin{cases} -\operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{2\xi u}{1-u^2}\right) & \text{si } K > 0 \\ \pi - \operatorname{Arc}\tan\left(\dfrac{2\xi u}{1-u^2}\right) & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

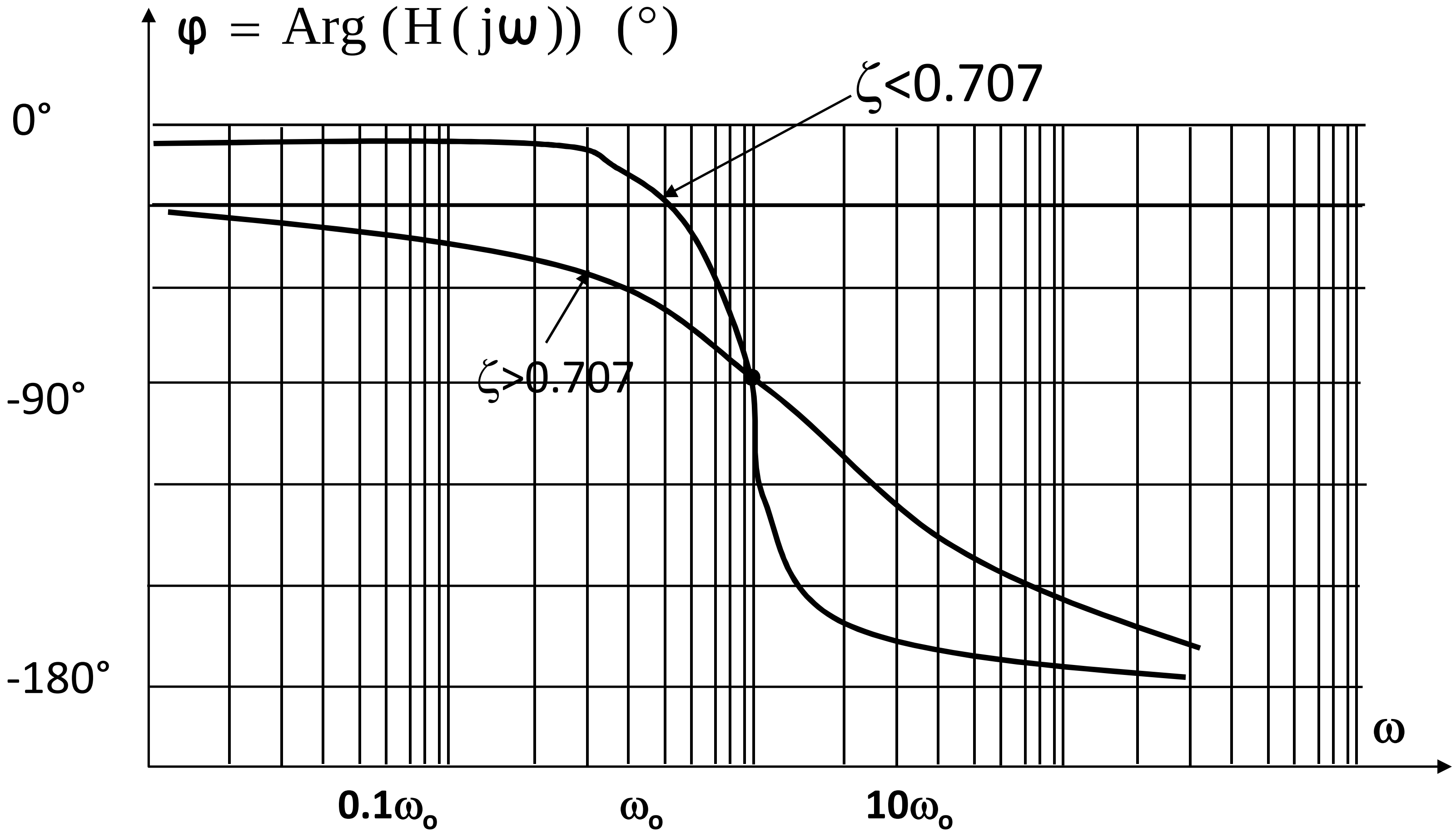
Diagramme de Bode



$$\omega_r = \omega_o \sqrt{1-2\xi^2}$$

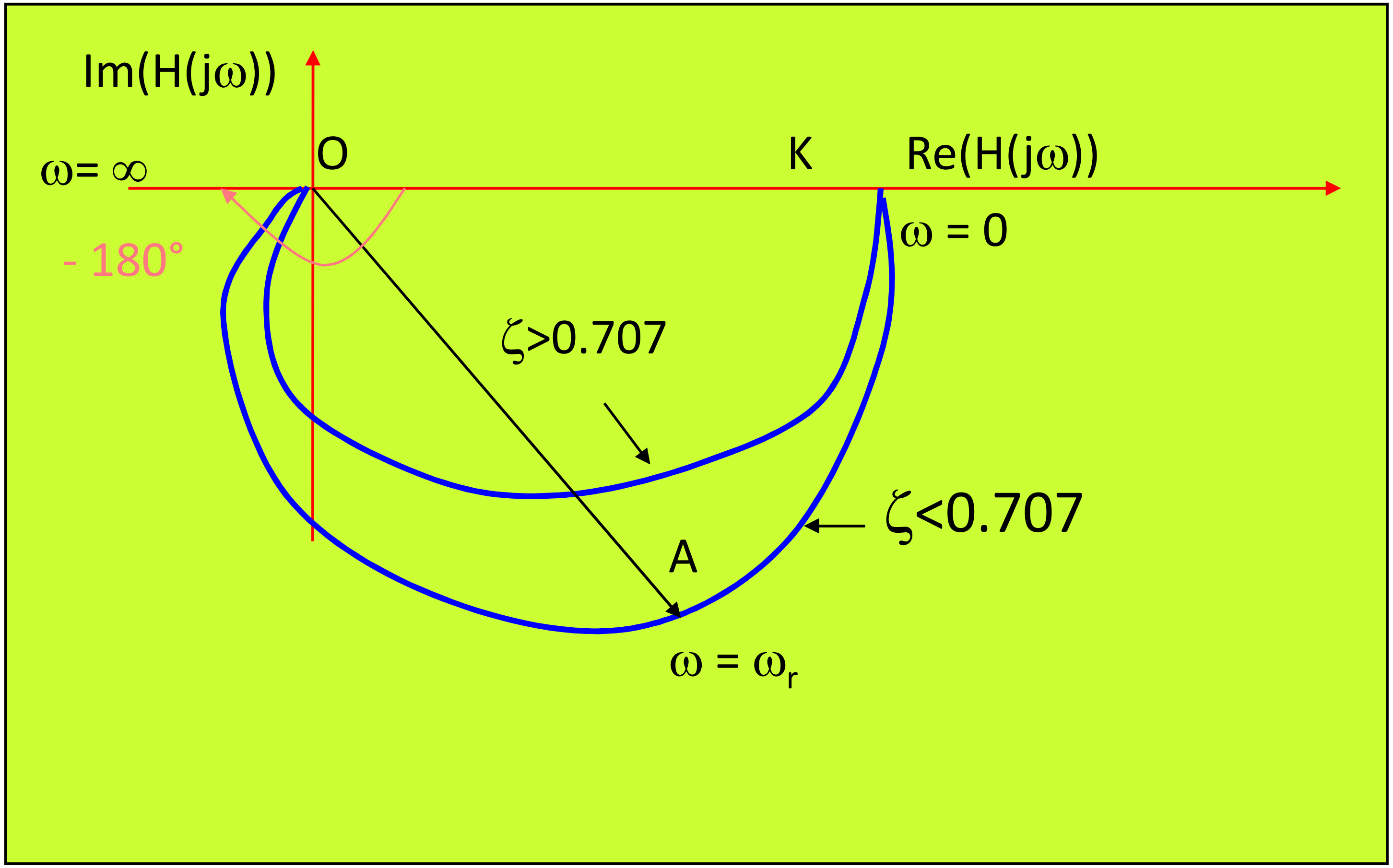
$$\omega_c = \omega_{3dB} = \omega_0 \sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{1+(1-2\zeta^2)^2}}$$

Courbe de gain d'un deuxième ordre pour K=3.16



Courbe de phase d’un premier ordre

Diagramme de Nyquist d'un second ordre:



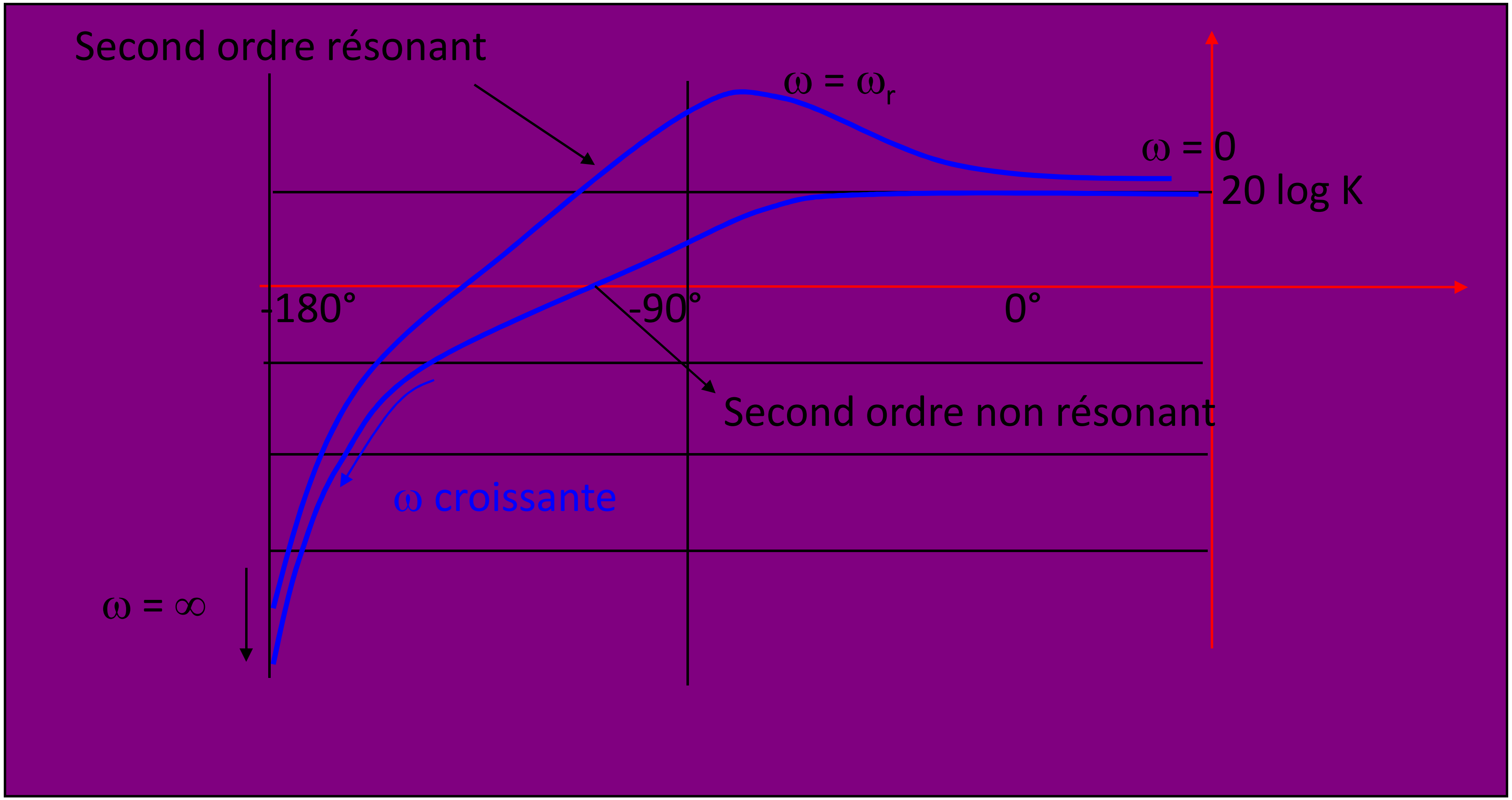


Diagramme de Black d'un second ordre

Il existe des abaques (Voir TD) donnant le produit $\omega_0 t_{5\%}$, le temps de montée et le temps du premier maximum en fonction du facteur d'amortissement ζ. Ces diagrammes permettent de déterminer les valeurs de ω_o et ζ pour obtenir un système ayant un temps de montée (ou de réponse) et un dépassement donnée c'est-à-dire une dynamique fixée. Ce qui permet de calculer les paramètres du régulateur pour réaliser cette dynamique.

Comme $\omega_0 t_{5\%} = f(\zeta)$, si pour ζ constante on augmente ω_o , $t_{5\%}$ diminue donc le système devient rapide. Or ω_o augmente entraine des parties réelles très négatives des pôles de la FT . Donc plus que les <u>parties réelles des</u> <u>pôles</u> sont <u>négatives</u> et plus le système est <u>rapide</u>.